UNIVERSITÉ DE LAUSANNE - FACULTÉ DES SCIENCES

SUR UNE CONJECTURE D'EILENBERG-GANEA

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Lausanne
pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences

par

Jean-Pierre MARVILLE
Mathématicien

1977

Lausanne
Imprimerie Copy Quick
1980

UNIVERSITÉ DE LAUSANNE - FACULTÉ DES SCIENCES

SUR UNE CONJECTURE D'EILENBERG-GANEA

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Lausanne
pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences

par

Jean-Pierre MARVILLE
Mathématicien

Lausanne
Imprimerie Copy Quick
1980

Imprimatur

Université de Lausanne
Faculté des Sciences

Vu le rapport présenté par le jury d'examen, composé de

MM . les Professeurs Serge MAUMARY, directeur de thèse, Valentin POENARU expert et André DELESSERT, président du jury,

le Conseil de Faculté autorise l'impression de la thèse de Monsieur Jean-Pierre MARVILLE, licencié ès sciences mathématiques de l'Université de Lausanne,
intitulée "SUR UNE CONJONCTURE D'EILENBERG-GANEA"

Lausanne, le 4 février 1977

Pour *Le doyen de la Faculté des Sciences*:
Professeur André DELESSERT
A. Delessert

UNIV. LEIDEN BIBL.

A Monsieur Pierre COMMENT

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546809_0013

SUR UNE CONJECTURE D'EILENBERG - GANEA .

§0 INTRODUCTION

On se propose d'étudier une question laissée en suspens dans un papier d'Eilenberg - Ganea [*Réf 1*] . *Rappelons quelques définitions et le théorème principal de celui-ci.*

Définition 0.1.

La dimension algébrique ou cohomologique d'un groupe π est le plus petit entier n tel que, quelque soit le π - module M , on ait $H^q[\pi, M] = 0 \ \forall q > n$.

Notation: $dim_A \pi = n = cd\pi$.

Définition 0.2.

La dimension géométrique du groupe π est la plus petite dimension n tel que l'espace d'Eilenberg - Mac Lane $K(\pi,1)$ soit un espace de dimension n .

Notation: $dim_G \pi = n$.

THEOREME 0.3 (*Eilenberg - Ganea*)

Pour tout groupe π , on a $dim_A \pi = dim_G \pi$ sauf pour les 3 cas exceptionnels et éventuels suivants:

	I	*II*	*III*
$dim_{A}\pi$	1	1	2
$dim_{G}\pi$	2	3	3

REMARQUE: On a toujours $cd\pi \leq dim_{G}\pi$.

REMARQUE

Depuis les travaux de Stallings - Swan [Réf 2] on sait que les cas *I* et *II* ne peuvent se rencontrer. En effet, leur résultat principal:

THEOREME 0.4 (*Stallings - Swan*)

Tout groupe π tel que $dim_{A}\pi = 1$ est un groupe libre.

implique que, si $dim_{A}\pi = 1$, alors $dim_{G}\pi = 1$.

En effet, on le voit facilement en prenant un bouquet de cercles. Alors $\bigvee_{K} S^1 = K(\pi,1)$ où K est le rang du groupe libre π

REMARQUE

On ne trouve pas de démonstration complète du théorème d'Eilenberg Ganea dans le papier original. La façon moderne de le démontrer est de l'obtenir comme un cas particulier des théorèmes de Wall [Réf. [4], Prop. 10] .

On remarquera que même ces derniers ne permettent pas de conclure à l'existence ou l'inexistence des cas *I* à *III* .

Ce travail résulte des essais infructueux à démontrer la conjecture suivante:

CONJECTURE I

Il existe des groupes tels que $dim_A \pi = 2 \neq dim_G \pi = 3$.

Comme le problème apparait difficile, nous nous sommes intéressés principalement aux groupes de présentation finie et tout au long de ce travail π distinguera, sauf mention contraire, un groupe de présentation finie.

Nous avons obtenu les quelques résultats partiels suivants:

THEOREME A (*Caractérisation des groupes de* $dim_G = 2$)

Soit un groupe π de présentation finie tel que $dim_A \pi = 2$. Alors, pour que π vérifie $dim_G \pi = 2$, il faut et il suffit que: $\begin{cases} (1) & \pi \text{ soit de type FL} \\ (2) & \pi \text{ soit efficient } [i.e. \text{la déficience de } \pi \text{ , vérifie} \end{cases}$

$$def(\pi) = rg\pi_{ab} - \rho[H_2(\pi,\mathbb{Z})] \quad] \quad . \quad \text{(cf §1 chap.I)}$$

Si le groupe π est de dimension géométrique 2, on peut trouver une construction explicite d'un $K(\pi,1)$ de dimension 2 .

xxxx

THEOREME B (*Construction de* $K(\pi,1)$ *de dimension 2*)

Soit π de présentation finie tel que $dim_G \pi = 2$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un C.W. complexe X ait le même type d'homotopie qu'un $K(\pi,1)$ est que la présentation Pr du groupe π associée canoniquement à X vérifie :

$$\boxed{def\ (Pr) = def\ \pi}$$

Comme le montre le théorème suivant, l'espoir de découvrir un contre-exemple à la conjecture parmi les groupes de dimension cohomologique 2 particulièrement simples est vain.

THEOREME C *(Groupes de $dim_G = 2$ de présentation finie)*

Si $cd\pi = 2$ et que π figure parmi la liste non exhaustive suivante:

1) groupes à un relateur sans torsion ,

2) groupes qui sont produits amalgamés ou (et) H.N.N. constructions de groupes libres ,

3) groupes qui contiennent un sous-groupe normal libre de type fini . [En particulier groupes à centre non nul et extensions de libres par libres] ,

4) groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 ,

5) groupes abéliens . [Dans ce cas, on ne suppose pas π de présentation finie] ,

alors $dim_G \pi = 2$.

xxxx

Citons encore le résultat intéressant suivant :

THEOREME D

Soit H de $dim_G = 2$, sous-groupe d'indice fini i d'un groupe π tel que $dim_A \pi = 2$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

i) $def\ H - 1 = i\ [def\ \pi - 1]$.

ii) $dim_G \pi = 2$.

xxxx

Moyennant une proposition du §2 chap III on voit que l'on peut toujours se ramener à examiner la conjecture I au cas des groupes indécomposables en regard du produit libre. Ce sont alors des groupes de dualité au sens de Bieri - Eckmann [Réf [3]] . Strebel [non publié][1] a démontré que ces groupes sont de type FP . Ainsi la conjecture pour les groupes de présentation finie se réduit aux 2 problèmes suivants :

Problème II

Soit un groupe π infini tel que $cd\pi = 2$. Est-ce que la propriété FP entraine la propriété FL ?

Problème III

Existe-t-il des groupes π non efficients tels que $cd\pi = 2$?

A ma connaissance, ces deux questions sont toujours sans réponse.

Je tiens à remercier vivement M. le Professeur S. Maumary qui a bien voulu accepter ce travail pour thèse de doctorat et qui m'a aidé de ses remarques et suggestions.

Ma reconnaissance va également à M. le Professeur M.A. Kervaire, au Dr. R. Bieri et au Dr. R. Strebel qui m'ont prodigué conseils et encouragements, à Mme. Berger qui a dactylographié le manuscrit avec patience et dévouement.

---

1) Cf. également K.S. Brown, Homological criteria for finiteness, Comment. Math. Helv. 50 (1975) 129-135 .

CHAP. I CARACTERISATION DES GROUPES DE $dim_G = 2$.

§1 UNE CONDITION NECESSAIRE

Nous rappelons brièvement quelques notions utiles à la démonstration de la nécessité du théorème A :

Définitions 1.1.

1) On appelle déficience d'une présentation finie Pr d'un groupe π le nombre défini par
$def(Pr) = n - r$ où n = nb. de générateurs de Pr ,
r = nb. de relations de Pr .

2) On appelle déficience d'une groupe π le nombre
$def\pi = \{\max[def(Pr)]$ où Pr parcourt l'ensemble des présentations finies de $\pi\}$.

EXEMPLES [cf. par ex. Réf 5 chap. *IV* §6]

1) Si π est libre, de rang n , alors $def\pi = n$.

2) Soit un groupe π à un relateur, $\pi = \left\{x_1,\ldots x_n \,/\, R(x_2\ldots x_n)\right.$
alors $def\pi = n - 1$.

Proposition 1.2

Pour tout groupe π *de présentation finie, on a*

$$\boxed{def\,\pi \leq rg H_1(\pi,\mathbb{Z}) - \rho\, H_2(\pi,\mathbb{Z})}$$

où ρ *est le nombre minimum de générateurs et* π *agit trivialement sur* $\mathbb{Z}$.

Définition 1.3

Soit X un espace topologique tel que ses groupes d'homologie soient de type fini, la caractéristique d'Euler Poincaré de X est défini par :

$\chi(X) = \Sigma(-1)^q \beta_q$ où β_q est le rg de $H_q(X,\mathbb{Z})$.

Proposition 1.4 [Réf. 6 p.101 Cor 20.11]

Soit X *un complexe cellulaire obtenu à partir de* α_o *points en attachant dans n'importe quel ordre* α_q *cellules de dimension* q , $q = 1,\ldots,n$, *alors*

$$\chi(X) = \sum_{o}^{n}(-1)^q \alpha_q \quad .$$

REMARQUE

Pour construire un 2 - complexe X cellulaire avec groupe fondamental isomorphe à π , il suffit de prendre une présentation finie (Pr) de π en termes de générateurs $(x_i)\ 1\leq i\leq n$ et de relations $(r_j)1\leq j\leq q$, d'y associer un bouquet de n cercles et d'attacher q 2 - cellules conformément aux relations (r_j) [cf th. 3.3.20 Réf 7].

Définition 1.5

On dit que X est le modèle cellulaire de Pr .

On vérifie facilement la réciproque suivante en contractant un arbre maximal dans X .

Proposition 1.6

Tout C.W. complexe X , connexe, fini, de dimension 2 avec groupe fondamental π a le même type d'homotopie que le modèle cellulaire $\overline{X}$ de la présentation obtenue en collapsant un arbre maximal de X .

Notation $Pr(X)$ sera la présentation associée au 2 - complexe fini X avec $\pi_1(X) \simeq \pi$.

THEOREME 1.7.

Pour que $cd\pi = 2 = dim_G\pi$, il faut que:
1) π soit de type FL
2) $def\ \pi = rg[H_1(\pi,\mathbb{Z})] - rg[H_2(\pi,\mathbb{Z})]$ (*)

où $\mathbb{Z}$ est un π - module trivial .

REMARQUES

1°) Un groupe π tel que l'on ait l'égalité (*) ci-dessus est appelé efficient [Réf. 5 p. 84] .

2°) Lorsque $cd\pi = 2$, il existe une résolution projective de longueur 2 de $\mathbb{Z}$ considérée comme un π - module trivial : $0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \longrightarrow \mathbb{Z}\pi \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. On voit alors facilement que $H_2(\pi,\mathbb{Z})$ est toujours un groupe abélien

libre et donc $p[H_2(\pi,\mathbb{Z})] = rg[H_2(\pi,\mathbb{Z})]$.

Démonstration

Supposons que $dim_G\pi = 2$,c'est-à-dire qu'il existe un 2 - complexe fini X tel que $X \simeq K(\pi,1)$.

Alors X possède un revêtement universel $\widetilde{X}$ admettant une structure de C.W. complexe et tel que la projection de revêtement P soit une application cellulaire. Le complexe $C_*(\widetilde{X})$ des chaines cellulaires de $\widetilde{X}$ est une résolution libre finie du π - module trivial $\mathbb{Z}$,puisque π est de présentation finie. Plus précisément, pour chaque i - cellule σ de X , on choisit un relèvement $\widetilde{\sigma}$ de σ dans $\widetilde{X}$ que l'on munit d'une orientation; l'action libre de π sur $\widetilde{X}$ permute les différentes cellules au-dessus de σ . Il s'ensuit que les cellules choisies de $C_i(\widetilde{X})$ forment une base de $C_i(\widetilde{X})$ considérés comme π - module libre. Comme X est un $K(\pi,1)$, $\pi_K(\widetilde{X}) = 0 \ \forall K>0$ et le théorème de Whitehead montre que $\widetilde{X}$ est contractible. D'où $0 \longrightarrow C_2(\widetilde{X}) \longrightarrow C_1(\widetilde{X}) \longrightarrow C_0(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ est une résolution libre finie du π - module $\mathbb{Z}$, *i.e.* π est de type FL .

REMARQUE

On démontrerait de façon semblable que l'on a toujours $cd\pi \leq dim_G\pi$.

D'autre part, d'après la proposition ci-dessus, X peut être considéré comme le modèle cellulaire d'une présentation finie Pr de π .

Soit $n = nb$ de générateurs de Pr

$r = nb$ de relations de Pr

alors X est obtenu en attachant à un point n 1 - cellules et r 2 - cellules. On a, par définition de $\chi(X)$

$$\chi(X) = \Sigma(-1)^q \beta_q = 1 - rg[H_1(X)] + rg[H_2(X)]$$

$$= 1 - rg\ \pi_{ab} + rg\ H_2(\pi,\mathbb{Z}) \quad . \qquad (1)$$

Par ailleurs, [cf prop. 1.4.], on a

$$\chi(X) = 1 - n + r \quad . \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on obtient

$$def[Pr(X)] = n - r = rg\ \pi_{ab} - rg\ H_2(\pi,\mathbb{Z}) \ .$$

Comme $H_2(\pi,\mathbb{Z})$ est abélien libre, [noyau de $C_2(X) \longrightarrow C_1(X)$],

$def[Pr(X)] = rg\ \pi_{ab} - \rho H_2(\pi) \geq def\pi$. Mais par définition de $def\pi$, on a $def[Pr(X)] \leq def\pi$.

C.Q.F.D.

Au cours de la démonstration, on a trouvé aussi :

COROLLAIRE 1.8

Soit X un 2 - C.W. complexe de type $K(\pi,1) \simeq X$ avec π de présentation finie, alors $def[Pr(X)] = def\pi$.

---

§2 UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QUE $dim_G \pi = 2$.

I CALCUL DIFFERENTIEL

Comme préliminaire à la démonstration de la 2ème partie du théorème A , nous rappelons les résultats essentiels du calcul différentiel de Fox :

Proposition 2.1 [cf Réf 8 chap. VI th. 5.5]

L'idéal d'augmentation IF *d'un groupe* F *libre sur l'ensemble* S *est un* $\mathbb{Z}F$ *- module libre sur l'ensemble* $S - 1 = \{s - 1 \mid s \in S\}$.

Définition 2.2

Soit π un groupe et un π - module A . Une fonction $d : \pi \longrightarrow A$ est une dérivation de π dans A . Si elle vérifie $d(xy) = dx + x\,dy \quad \forall x, y \in \pi$.

THEOREME 2.3

Soit F un groupe libre sur $\{x_s\}_{s \in S}$. Alors il existe pour chaque $s \in S$ une dérivation unique de F dans $\mathbb{Z}F$ appelée dérivée partielle et notée $\frac{\partial}{\partial x_s}$ telle que : $\frac{\partial x_t}{\partial x_s} = \delta_{st}$ où δ_{st} est le symbole de Kronecker .

Démonstration

Par la proposition rappelée ci-dessus, tout élément de la forme $1 - \delta$, $\delta \in F$ s'écrit de manière unique :

$$(2.2) \qquad 1 - \delta = \Sigma \; \mathcal{D}_{X_i}(\delta)\,(1 - X_i) \quad .$$

Cette représentation définit des fonctions "coordonnées"

$$\mathcal{D}_{X_i} : F \longrightarrow \mathbb{Z}F \quad .$$

De (2.2) , par un calcul facile, on trouve les propriétée suivantes:

$$(2.3) \quad \begin{cases} (i) \;\; \mathcal{D}_{X_i}(X_K) = \begin{cases} 1 & si \;\; i = K \\ 0 & i \neq K \end{cases} \\ (ii) \;\; \mathcal{D}_{X_i}(\delta.\bar{\delta}) = \mathcal{D}_{X_i}(\delta) + \delta\, \mathcal{D}_{X_i}(\bar{\delta}) \\ (iii) \;\; \mathcal{D}_{X_i}(\delta^{-1}) = -\delta^{-1}\, \mathcal{D}_{X_i}(\delta) \end{cases} .$$

La propriété (ii) nous montre que $\mathcal{D}_{X_i}$ est une dérivation . On pose $\mathcal{D}_{X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i}$; la propriété (i) constitue le théorème .

REMARQUE:

Pour calculer les dérivées partielles d'un élément $\delta \in F$, on le fait en utilisant les formules (i) à (iii) .

Proposition 2.4

Soit un groupe π *présenté par* $1 \lhd R \longrightarrow F \xrightarrow{p} \pi$ *où* F *est un groupe libre sur* $\{X_\alpha\}$. *Alors il existe une suite exacte de* $\mathbb{Z}\pi$ *- modules :*

$$0 \longrightarrow R_{ab} \xrightarrow{\theta} X \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\pi \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où X *est un* $\mathbb{Z}\pi$ *- module libre de base* e_α *avec* $\partial e_\alpha = (X_\alpha - 1)$,

où la structure de π *- module* R_{ab} *est induite par la conjugaison dans* F *et* θ *est donnée par la formule* $\theta(\bar{r}) = \sum_\alpha P_* \left(\frac{\partial r}{\partial X_\alpha}\right) e_\alpha$ *avec* $\bar{r} = r \mod [R,R]$ *et* $P_*: \mathbb{Z}F \longrightarrow \mathbb{Z}\pi$.

Démonstration:

D'après le théorème 6.3 et le cor. 6.4 chap. *VI* de [8], il existe une suite exacte de π - modules:

$$0 \longrightarrow R_{ab} \xrightarrow{K} \mathbb{Z}\pi \otimes_F IF \xrightarrow{\nu} I\pi \longrightarrow 0 \quad .$$

D'après la proposition 2.1, IF est F - libre, donc $\mathbb{Z}\pi \otimes_F IF = X$ est π - libre sur les éléments $1_\pi \otimes (X_\alpha - 1) = e_\alpha$.

L'application K est définie par $K\left(r \Big/ [R,R]\right) = 1_\pi \otimes (r-1) \in X$

Vérifions que $K = \theta$ .D'après (2.2) ,

$r - 1 = \sum \frac{\partial r}{\partial X_\alpha} (X_\alpha - 1)$ d'où

$$1_\pi \otimes (r-1) = \sum_\alpha \left[1_\pi \otimes \frac{\partial r}{\partial X_\alpha} (X_\alpha - 1)\right] = \sum_\alpha \left[P_* \frac{\partial}{\partial_\alpha} \otimes (X_\alpha - 1)\right] =$$

$= \sum_\alpha P_* \left(\frac{\partial r}{\partial X_\alpha}\right) e_\alpha$. Ainsi: $K = \theta$.

Reste à voir que $\nu = \partial$. La projection $p: F \longrightarrow \pi$ induit un épimorphisme de F - modules $P_*: IF \longrightarrow I\pi$ (1) avec $P_*(X_\alpha - 1) = X_\alpha - 1$. Tensorisons (1) à gauche par $\mathbb{Z}\pi \otimes_F$. D'où $X \xrightarrow{id \otimes P_*} \mathbb{Z}\pi \otimes_F I\pi$. Comme π - module $\mathbb{Z}\pi \otimes_F I\pi$ est isomorphe à $I\pi$ et donc $\partial = \nu$.

On va établir maintenant la version topologique de la proposition précédente.

Proposition 2.5

Soit $\pi \quad \left\{ x_1, \ldots, x_n \,/\, r_1, \ldots r_s \right\}$ *un groupe de présentation finie. Alors on peut trouver une suite exacte de* π *- modules libres :* $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ *de bases respectivement* $\left\{ \tilde{e}^0_1 \right\}$, $\left\{ \tilde{e}^1_1 , \ldots . \tilde{e}^1_n \right\}$, $\left\{ \tilde{e}^2_1 , \ldots , \tilde{e}^2_s \right\}$ *et où*

$$\partial_2 (\tilde{e}^2_j) = \sum_k P* \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_k} \right) \tilde{e}^1_k$$

$$\partial_1 (\tilde{e}^1_k) = x_k - 1 \quad .$$

Démonstration

Considérons le modèle cellulaire associé à la présentation de π et soit $\tilde{X}$ son revêtement universel. Comme on l'a déjà vu au §1, les modules de chaines cellulaires $C_i(\tilde{X}) i = 0,1,2,$ considérés comme π - modules sont libres de rang respectivement $1, n, r$ .De plus, on peut choisir les bases des $C_i(\tilde{X})$ de la façon suivante:

soit $\tilde{e}_0$ la 0 - cellule au-dessus de e_0 correspondant à l'élément-unité de π ,

soit $\tilde{e}^1_i$, la 1 - cellule au-dessus de e^1_i dans X correspondant au générateur x_i tel que $\partial_1 \tilde{e}^1_i = x_i \tilde{e}_0 - \tilde{e}_0$

soit $\tilde{e}^2_j$ la 2 - cellule au-dessus de e^2_j basée en $\tilde{e}_0$.

On vérifie par récurrence et de la façon suivante que l'opérateur bord ∂_2 est de la forme annoncée :

soit $r_j = X_{i_1}$, $\quad r_j = X_{i_1}^{-1}$,

(1) $\partial\tilde{e}_j^2 = \tilde{e}_{i_1}^1$. $\quad$ (2) $\partial\tilde{e}_j^2 = -P^*\left(X_1^{-1}\right)\tilde{e}_1^1$.

si $r_j = X_{i_1} X_{i_2}$, $\quad$ si $r_j = X_{i_1} X_{i_2}^{-1}$

(3) $\partial\tilde{e}_j^2 = \tilde{e}_{i_1}^1 + P^*(X_1)\tilde{e}_{i_2}^1$. $\quad$ (4) $\partial\tilde{e}_j^2 = \tilde{e}_{i_1}^1 - P^*\left(X_{i_1} X_{i_2}^{-1}\right)\tilde{e}_{i_2}$.

Plus généralement :

si $r_j = \omega X_k$, $\quad$ si $r_j = \omega X_k^{-1}$,

(5) $\partial\tilde{e}_j^2 = A + [P^*(\omega)]\ \tilde{e}_k^1$ $\quad$ (6) $\partial\tilde{e}_j^2 = A - \left(P^*\omega X_X^{-1}\right)\tilde{e}_k^{-1}$

où $A = \partial\tilde{e}_j^2$. $\quad$ si $r_j = \omega$.

Dans chaque cas (1 à 6), on vérifiera sans peine grâce aux formules (2.3) que $\partial\tilde{e}_j^2 = \sum_k P^*\left(\frac{\partial r_j}{\partial X_k}\right)\tilde{e}_k^1$.

Joignant les 2 propositions précédentes, on obtient :

Proposition 2.6

Pour tout groupe π *de présentation finie il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccccc} C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & \mathbb{Z} & & \\ \beta\downarrow & & \downarrow iso & & \downarrow iso & & \downarrow iso & & (2.6) \\ 0 \longrightarrow & R_{ab} & \xrightarrow{\theta} & X & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z}\pi & \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & \mathbb{Z} & . \end{array}$$

Démonstration

Il ne reste plus qu'à définir l'application β , ce qu'on fait de manière suivante : $\tilde{e}^2_j \longmapsto r_j \,/\, [R,R]$.

cqfd.

COROLLAIRE 2.7

Soit un groupe π *de présentation finie avec* $cd\pi = 2$.
Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $dim_{G^\pi} = 2$.

(ii) il existe une présentation Pr *de* π *telle que , dans le diagramme (2.6) associé à* Pr , $Ker\ \partial_2 = 0$.

(iii) il existe une présentation Pr *de* π *telle que dans le diagramme (2.6) associé à* Pr , β *soit un monomorphisme .*

Démonstration

On voit facilement que $i) \Longleftrightarrow ii)$. De plus, la commutativité du diagramme (2.6) montre que $ii) \Longleftrightarrow iii)$.

On est maintenant en mesure de démontrer la 2ème partie du théorème A.

THEOREME 2.8

Pour qu'un groupe π de présentation finie et tel que $cd\pi = 2$ soit de $dim_G = 2$, il suffit que π soit de type FL et efficient .

Démonstration

Comme π est de type FL et que $cd\pi = 2$, il existe une résolution finie de $\mathbb{Z}$ par des π - modules libres de longueur 2

$$0 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_o \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad (i) .$$

Par ailleurs, soit une présentation finie quelconque Pr de π . On a toujours la résolution projective

$$0 \longrightarrow R_{ab} \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad (ii) .$$

Appliquant le théorème de Schanuel à $i)$ et $ii)$, on obtient l'isomorphisme de π - modules $R_{ab} \oplus F_1 \simeq F_2 \oplus X$. Donc R_{ab} est stablement libre. Autrement dit, cela signifie que si R_{ab} n'est pas libre, on peut se ramener en ajoutant à la présentation Pr de π un nombre fini de générateurs

y_ℓ , $1 \leq \ell \leq m$,ét les relations triviales correspondantes $y_\ell = e$, au cas où R_{ab} est un π - module libre de rang fini k .

Prenons une présentation Pr de π telle que $def(Pr) = def\pi$. On peut, comme on l'a vu ci-dessus, supposer R_{ab} libre de rang k .Puisque l'application β du diagramme (2.6) est un épimorphisme $\beta: C_2 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow R_{ab}$, on a $rg\ C_2 = \delta = nb.$ de relations de $Pr \geq rg\ R_{ab} = k$.

On va montrer qu'on a toujours $\delta \leq k$ si le groupe π est efficient. Donc en fait $\delta = k$.

Soit une présentation Pr de π telle que $def(Pr) = def\pi$ avec n générateurs et δ relations. Appliquons le foncteur $\mathbb{Z} \otimes_\pi$ à la suite exacte inférieure du diagramme (2.6) considérée comme résolution libre du π - module trivial $\mathbb{Z}$.

On obtient la suite de groupes abéliens:

$$0 \longrightarrow H_2(\pi,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_\pi R_{ab} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_\pi X \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_\pi I\pi \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Utilisant les isomorphismes suivants:

$\mathbb{Z} \otimes_\pi I\pi \simeq \pi_{ab}$ [réf. [8], lemme 4.1 chap. VI]

$\mathbb{Z} \otimes_\pi \left[\mathbb{Z}\pi \otimes_F IF\right] \simeq \left(\mathbb{Z}\pi \otimes_\pi \mathbb{Z}\pi\right) \otimes_F IF \simeq \mathbb{Z} \otimes_F IF \simeq F_{ab}$

$\mathbb{Z} \otimes_\pi R_{ab} \simeq R \Big/ [R,F]$ [cf [8] chap VI formule 8.3]

On transforme la suite ci-dessus (*) en:

$$0 \longrightarrow H_2(\pi,\mathbb{Z}) \longrightarrow R \Big/ [R,F] \longrightarrow F_{ab} \xrightarrow{P*} \pi_{ab} \longrightarrow 0 \quad .$$

Or $\beta_1 = rg\ \pi_{ab} = rg.(F_{ab}) - rg\ [Ker\ P_*] = n - rg\ [Ker\ P_*]$

et $rg\ [Ker\ P_*] = rg\left[R/[F,R]\right] - rg\left[H_2(\pi,\mathbb{Z})\right] = rg\left\{R/[F,R]\right\} - \beta_2$,

d'où $\beta_1 - \beta_2 = n - rg\left[R/[F,R]\right]$ .Mais l'hypothèse d'efficience

$\beta_1 - \beta_2 = n - s$ implique que $rg\left[R/[F,R]\right] = s$. Comme

R a k générateurs, $rg\left[R/[F,R]\right] \leq k \Longrightarrow s \leq k$.

On a la suite $1 \longrightarrow Ker\ \beta \longrightarrow C_2 \longrightarrow R_{ab}$. Comme R_{ab}

est libre, donc projectif $\Longrightarrow C_2 \simeq Ker\ \beta \oplus R_{ab}$ avec

$C_2 \simeq R_{ab}$. Un théorème de Kaplansky [Cf. Réf. 10] entraine

$Ker\ \beta = 0$ et le corollaire (2.7 *iii*) montre que $dim_G\ \pi = 2$.

C.Q.F.D.

§3 CONSTRUCTION DE ' K(π,1) DE DIMENSION 2 .

On va montrer le

THEOREME B

Soit π de présentation finie tel que $dim_G \pi = 2$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un C.W. complexe X ait le même type d'homotopie qu'un $K(\pi,1)$ est que l'on ait $def[Pr(X)] = def\pi$.

Démonstration

On a déjà démontré qu'elle est nécessaire [Cor. 1.8] . Il faut montrer maintenant que le modèle cellulaire X associé à une présentation Pr tel que $def\pi = defPr$ a même type d'homotopie qu'un $K(\pi,1)$ si $dim_G\pi = 2$.

On va montrer d'abord que X est tel que

$H_2(X,\mathbb{Z}) \simeq H_2(\pi)$. En effet

$1 - \chi(X) = rg\ \pi_{ab} - rg\ H_2(X) = n-r = def(Pr) = def\pi = rg\ \pi_{ab} - \rho H_2(\pi)$. Par comparaison on obtient : $H_2(X,\mathbb{Z}) \simeq H_2(\pi)$ comme groupes abéliens libres de même rang.

Il s'agit de montrer que $\pi_2(X) = 0$,car alors on aura $H_2(\tilde{X}) = 0$,d'où $H_i(\tilde{X}) = 0$ pour tout $i > 0$ et la contractibilité de $\hat{X}$.

Alors, d'après un théorème de Whitehead [Réf 9 th. 6 + cor.]

on peut attacher des ensembles Σ_1 et Σ_2 de 2 - cellules disjointes à X et K respectivement de telle sorte que $X \vee \Sigma_1$ et $K \vee \Sigma_2$ aient même type d'homotopie. De plus X et K sont finis donc Σ_1 et Σ_2 sont également finis.

Algébriquement cela se traduit par:

$\pi_2(X) \oplus M_1 \simeq \pi_2(K) \oplus M_2$ [cf Réf 9 Cor. 1 du th. 6]

où M_i $i = 1,2$ sont $\mathbb{Z}(\pi)$ - modules libres de base finies.

De plus, les groupes abéliens libres

$H_2(X \cup \Sigma_1)$ et $H_2(K \cup \Sigma_2)$ sont isomorphes

et par la suite de Meyer-Vietoris, on a :

$$H_2(X \cup \Sigma_1) \simeq H_2(X) \oplus A_1$$

$$H_2(K \cup \Sigma_2 \simeq H_2(K) \oplus A_2$$

où Ai $i = 1,2$ sont des groupes abéliens libres.

Or pour la première partie: $H_2(X) \simeq H_2(K) \simeq H_2(\pi)$ et comme le principe de simplification est valable pour les groupes abéliens, on a

$$A_1 \simeq A_2 \quad .$$

En conséquence $M_1 \simeq M_2$.

Et comme $\pi_2(K) = 0$, on a $M_2 \simeq \pi_2(X) \oplus M_1$.

Une nouvelle application du théorème de Kaplansky [Réf. 10] pour les surjections de $\mathbb{Z}\pi$ - module libre de même rang donne $\pi_2(X) = 0$, d'où $X \simeq K(\pi,1)$.

C.Q.F.D.

Applications

Le théorème B nous permet de construire explicitement des $K(\pi,1)$ de dimension 2 . Par exemple:

1) Soit π - groupe de noeud. On verra plus loin que $dim_G \pi = dim_A \pi = 2$.

Le modèle cellulaire associé à la présentation de Wirtinger de π est un $K(\pi,1)$.

2) Soit π - groupe à un relateur sans torsion. On verra de même que $dim_G \pi = dim_A \pi = 2$.

Le modèle cellulaire associé à la présentation $\pi = \left\{ X_1, \ldots, X_q \;/\; R(X_1, \ldots, X_q) = e \right\} = Pr$ est un $K(\pi,1)$, car $def(Pr) = def\,\pi$.

CHAP. II GROUPES DE DIMENSION GEOMETRIQUE 2 .

§4 SOUS-GROUPES

Si $dim_G \pi = 2$ *, alors la théorie des revêtements implique que tout sous-groupe* H *de* π *est de* $dim_G \leq 2$.
On a examiné le problème réciproque: soit H *un groupe de* $dim_G = 2$ *, sous-groupe de* π *où* $cd\pi = 2$ *, est-ce que* π *est de* $dim_G = 2$ *? Le théorème suivant y répond dans le cas où* H *est d'indice fini dans* π .

THEOREME D

Soit H de $dim_G = 2$, sous-groupe d'indice fini j d'un groupe π tel que $dim_A \pi = 2$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

i) $dim_G \pi = 2$, *ii)* $def H - 1 = j\,(def \pi - 1)$.

REMARQUE

Si H est sous-groupe d'indice j d'un groupe π la relation suivante est toujours vérifiée.

$$def H - 1 \geq j\,(def \pi - 1) \quad .$$

On le voit facilement en appliquant la méthode de Reidemeister et le théorème de Schreier [cf Réf. 11 sec. 2.3] qui donnent une présentation de H .

Démonstration

ii) ⇒ i)

Considérons la réalisation géométrique d'une présentation Pr de π vérifiant $def(Pr) = def\pi$. Soit X le C.W. complexe ainsi obtenu. Soit $\overline{X}$ le revêtement associé à H . Au dessus de chaque q - cellule de $X, q = 0,1,2$, il y a $i\,q$ - cellules.

Déterminons alors la présentation de H associée canoniquement à $\overline{X}$ .Il suffit de contracter un arbre maximal T dans $\overline{X}$ .Comme nous avons i 0 - cellules l'arbre maximal T contiendra $(i-1)$ 1 - cellules .

D'où $def\left(\overline{X}/_T\right) = i(n-r) - i + 1 = i(def\pi) - i + 1$.

Or, par hypothèse, $i(n-r) - i + 1 = defH$.

Comme $dim_G H = 2$, le théorème B implique que $\overline{X} = K(H,1)$.

Si $P : \overline{X} \longrightarrow X$ est la projection de revêtement, alors $P* : \pi_n(\overline{X}) \longrightarrow \pi_n(X)$ est un isomorphisme pour $n \geq 2$. Donc $X \simeq K(\pi,1)$ *i.e.* $dim_G \pi = 2$.

C.Q.F.D.

i) ⇒ ii)

Supposons que $dim_G \pi = 2$. Soit $X \simeq K(\pi,1)$ un C.W. complexe de dimension 2 .Considérons le revêtement $\overline{X}$ associé au sous-groupe H . La projection de revêtement $P: \overline{X} \longrightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_i(\overline{X}) \longrightarrow \pi_i(X)$ pour $i \geq 2$, donc $\overline{X} \simeq K(H,1)$. En contractant un arbre maximal T on obtient :

$def\left(\overline{X}/_T\right) = i\,def\pi - (i-1)$. Par le théorème B ,

$def\left(\overline{X}/_T\right) = defH$, d'où $defH - 1 = i\,(defG - 1)$.

EXEMPLE

Soit le groupe $\pi = \left\{ a,b,X \,/\, \begin{matrix} a^2 = [b,X] \\ [a,X] = e \end{matrix} \right\}$.

On voit facilement que π est extension scindée de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}$ .Pour démontrer que $dim_G \pi = 2$, on peut utiliser le corollaire (5.6) ou employer le théorème D de la façon suivante.

On considère le sous-groupe H normal engendré par X et b . Par la méthode de Reidemeister-Schreier [cf Réf. 11 Sec. 2.3] , on obtient une présentation équivalente à la suivante : $H = \left\{ d,\delta,g \,/\, \begin{matrix} [d,g] = e \\ [[d,\delta],d] = e \end{matrix} \right\}$

On voit facilement que $H \simeq H_1 *_F H_2$ où les $H_i, i = 1,2$, sont des groupes à un relateur. D'après (Prop.5.3) $dim_G H = 2$ et $def H = 1$. Par ailleurs $\pi_{ab} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ .En vertu de la présentation de π ci-dessus $def \pi \geq 1$ .Supposons que $def \pi > 1$,alors on obtient $def H - 1 = 0 > 2\,(def \pi - 1)$.

Contradictoire. D'où $def \pi = 1$ et par le théorème D , $dim_G \pi = 2$.

§5 PRODUITS LIBRES, AMALGAMATIONS ET H.N.N CONSTRUCTIONS .

Proposition 5.1

Pour que $H = *_{i\in I} \pi_i$ *soit de* $dim_G = 2$ *, il faut et il suffit que* $dim_G \pi_i = 2$. $\forall i\in I$.

Démonstration

Soit $dim_G H = 2$. Alors la théorie des revêtements implique qu'il existe un $K(\pi_i,1)$ de dimension 2, $\forall i\in I$. Réciproquement, si $dim_G \pi_i = 2$, alors en prenant le wedge des $K(\pi_i,1)$, on obtient un espace $E = \bigvee_{i\in I} K(\pi_i,1)$. D'après le lemme ci-dessous, $E \simeq K(H,1)$.

Lemme 5.2 [cf Whitehead Réf. 19]

Soient $X = X_1 \cup X_2$ *et* $X_3 = X_1 \cap X_2$ *des C.W. complexes tels que* $X_i = K(\pi_i,1)$ $i = 1,2$ *et* $X_3 = K(A,1)$ *où* A *est un sous-groupe de* π_1 *et de* π_2 . *Alors* $X \simeq K\left(\pi_1 *_A \pi_2, 1\right)$.

Démonstration

Une application directe du théorème de Van-Kampen nous montre que le groupe fondamental de X est isomorphe à $\pi_1 *_A \pi_2$. Soit $P:\overline{X} \longrightarrow X$ le revêtement universel de X . On va montrer que $\overline{X}$ est contractible. Soient $\overline{X}_i = P^{-1}(X_i)$ $i = 1,2,3$ les sous-espaces de $\overline{X}$ recouvrant X . Considérons une composante connexe de X_i^* de $\overline{X}_i$ $i = 1,2,3$.

Alors $P|X_i^*$ est encore un revêtement de X_i , donc $\pi_1(X_i^*)$ en un sous-groupe de $\pi_1(X_i)$. Le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_i^*) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}) = 0 \\ \text{mono} \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X_i) & \xrightarrow[\text{mono}]{} & \pi_1(X) \end{array}$$

entraine $\pi_1(X_i^*) = 0$.

Donc X_i^* est le revêtement universel de X_i .Comme $\bar{X}_i = \bigvee X_i^*$,cela entraine que $\pi_k(\bar{X}_i) = 0 \ \forall k>0$ .Par le théorème d'Hurewicz, $H_k(\bar{X}_i) = 0$ .On peut appliquer la suite de Meyer-Vietoris à la triade $\tilde{X} = \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2$ et $\bar{X}_3 = \bar{X}_1 \cap \bar{X}_2$. On vérifie sans peine que $H_n(\tilde{X}) = 0 \ \forall n>0$. D'où , à nouveau par Hurewicz $\pi_n(\tilde{X}) = 0 \ \forall n>0$. D'où $X \simeq K\left(\pi_1 *_A \pi_2, 1\right)$.

Comme signalé dans l'introduction, il suffit d'examiner la conjecture pour des groupes indécomposables en regard du produit libre .

Proposition 5.3

Soit (1) $H = A *_C B$ *ou* (2) $H = A *_C$ (H.N.N. Construction). *Si* $dim_G A = dim_G B = 2$ *et que* C *est un groupe libre, alors* $dim_G H = 2$.

Démonstration

l'idée est de construire un $K(H,1)$ à partir

soit (1) de $K(A,1)$ et de $K(B,1)$

soit (2) de $K(A)$.

Plus précisément, soient K_A , K_B les espaces d'Eilenberg-Mac Lane de dimension 2. Ils contiennent un wedge de cercles qui est un $K(C,1)$.

Dans le cas où $H = A *_C B$, soit X l'espace amalgamé $K(A,1) \underset{K(C,1)}{\cup} K(B,1)$ et dans le cas où $H = A *_C$.

Soit X l'espace amalgamé $K(A,1) \underset{K(C,1) \times \{0,1\}}{\cup} \left[K(C,1) \times [0,1]\right]$

à l'aide de deux inclusions $i_0 : K(C,1) \rightarrowtail K(A,1)$

$i_1 : K(C,1) \rightarrowtail K(A,1)$

représentant les deux injections $C \underset{i_1}{\overset{i_0}{\rightrightarrows}} A$. Dans les deux cas, le théorème de Van-Kampen permet de montrer que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(H)$. Pour plus de détails [cf. Réf.26 p.67 à 71] . Par le lemme (5.2) ,on a $X \simeq K(H,1)$ et X est de dimension 2 .

COROLLAIRE 5.4

Dans le cas (1) $def H = def A + def B - rg C$,

Dans le cas (2) $def H = def A + 1 - rg C$.

Démonstration

Découle du théorème A et du théorème B .

Définition [cf Réf.22]

Un H.N.N groupe arborescent, ("treed H.N.N group")est un groupe H.N.N. dont la base est un produit arborescent de groupes et dont les sous-groupes associés sont contenus dans les groupes sommets du produit arborescent.

Rappelons le puissant théorème de structure de Bieri .

THEOREME 5.5 [cf Bieri Réf. 23]

Soit G un groupe de présentation finie, $cd\ \pi = 2$ possédant un sous-groupe normal libre de type fini. Alors G est un H.N.N. groupe arborescent sur un arbre fini dont les sommets sont des groupes libres.

COROLLAIRE 5.6

Tout groupe π , $cd\ \pi = 2$, de présentation finie possédant un sous-groupe normal libre de type fini est de dimension géométrique 2 .

En particulier : 1) tout groupe π , $cd\ \pi = 2$, de centre non nul est de dimension géométrique 2 .

2) tout groupe extension d'un groupe libre par un groupe libre est de dimension géométrique 2.

Démonstration

C'est une simple application du th. 5.5 et de la prop.52 car Swan a démontré que le centre d'un groupe π tel que $cd\pi = 2$ et de présentation finie est isomorphe à $\mathbb{Z}$ [par ex. cf Bieri Réf. 23]

REMARQUE

La partie 2) du cor. 5.6 peut se démontrer directement en utilisant le corollaire 2.7 .

On peut généraliser la proposition (5.3) au cas où C *n'est pas un groupe libre de la façon suivante:*

Proposition 5.7

Soit $\pi = G_1 *_H G_2$ *où* H *est un sous-groupe de chacun des* G_i $i = 1,2$ *et* $cd\ \pi = 2$ *. Pour que* $dim_G \pi = 2$ *, il faut et il suffit que:*

$$\begin{cases} i) & dim_G H = dim_G G_i = 2 \qquad i = 1,2 \\ ii) & def\ \pi = def\ G_1 + def\ G_2 - def\ H \end{cases}$$

Démonstration :

Si $\pi = G_1 *_H G_2$, les caractéristiques d' Euler-Poincaré sont d'après Serre [Réf.[4], Prop. 8] liées par la relation suivante:

$$\chi(\pi) = \chi(G_1) + \chi(G_2) - \chi(H) \qquad (*)$$

Si $dim_G = 2$, alors G_i et H sont de $dim_G = 2$ donc efficients d'après le théorème A . De (*) , on tire

$$1 - \chi(\pi) = 1 - \chi(G_1) + 1 - \chi(G_2) - [1 - \chi(H)] \quad .$$

Comme les groupes sont efficients, on a

$$1 - \chi(G_i) = def G_i \qquad 1 - \chi(H) = def H$$

d'où la relation *ii)* .

Réciproquement, d'après le théorème A , il suffit de démontrer que π est de type FL et efficient. Comme G_1, G_2 et H sont de type FL , π l'est aussi. De plus G_1, G_2 et H sont efficients, donc :

$1 - \chi(G_i) = def G_i$

$1 - \chi(H) = def H$.

D'où $1 - \chi(\pi) = \beta_1(\pi) - \beta_2(\pi) = def G_1 + def G_2 - def H = def \pi$ par hypothèse. Donc π est efficient .

REMARQUE

Sous les hypothèses $cd\ \pi = 2$ et $i)$, la relation $def \pi < def G_1 + def G_2 - def H$ est équivalente à π non efficient.

---

§6 GROUPES FONDAMENTAUX DE VARIETES DE DIMENSION 3 .

On va montrer le théorème suivant :

THEOREME 6.1

Soit π un groupe de présentation finie tel que $cd\ \pi = 2$. Si π est le groupe fondamental d'une variété de dimension 3 quelconque [*i.e.* à bord ou sans bord, compact ou non], alors $dim_G\ \pi = 2$.

REMARQUE

Il existe des groupes π tel que $dim_G \pi = cd\ \pi\ 2$ et qui ne puissent être groupe fondamental d'une variété de dimension 3 . Par exemple, soit $\pi = \left\{x,y \,/\, y \times y^{-1} = x^2\right\}$.

Il est bien connu que $cd\ \pi = 2$ et l'on verra plus loin que $dim_G \pi = 2$ .De plus, π est résoluble sans être polycyclique. Par un théorème de Mayer-Evans [Réf.13] , π ne peut être le groupe fondamental d'une variété de dimension 3 .

Pour la démonstration, nous utilisons le résultat suivant de Jaco :

THEOREME 6.2 [cf Réf. 14]

Soit π le groupe fondamental d'une variété M de dimension 3 quelconque. Alors pour tout sous-groupe H de π de présentation finie, il existe une variété de dimension 3 M' telle que $\pi_1(H') \simeq H$ et M' soit compacte.

Démonstration du théorème

D'après la proposition 5.1 du §5 et le th.6.2, il suffit de démontrer le théorème pour π indécomposable en regard du produit libre. Alors par le théorème 6.2 , il existe un variété de dimension 3, M' compacte, telle que $\pi_1(M) = \pi$. Deux cas sont possibles :

1°) $\pi_2(M) = 0$

2°) $\pi_2(M) \neq 0$.

Cas 1:

i) Si $\pi_3(M) = 0$,alors considérons le revêtement universel $\tilde{M}$ de M , alors $\pi_i(\tilde{M}) = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$. Par le théorème d'Hurewicz et à cause de la dimension, on voit que $\pi_i(\tilde{M}) = 0$ $i>3$ .Donc $\pi_1(\tilde{M}) = 0$ $\forall n \geq 1$. Donc M est asphérique. $H_3(M,\mathbb{Z}_2) = H_3(\pi,\mathbb{Z}_2) = 0$ car $cd\ \pi = 2$. Par dualité de Poincaré M est une variété compacte à bord . Grâce au théorème de triangulation des variétés de dimension 3 [cf Moise Réf.[6]] , M peut être considérée comme une variété combinatoire à bord de dimension 3 .Par un lemme de la théorie des variétés combinatoires [cf Glaeser p.52 Ex.7 Réf.[7]] elle s'effondre sur un 2 - complexe qui est compact puisque M est compacte et a même type d'homotopie qu'un $K(\pi,1)$ grâce à nos hypothèses. D'où dans ce cas-là le théorème.

ii) $\pi_3(M) \neq 0$ .On va montrer que, dans nos hypothèses cela ne peut se produire .En effet le revêtement universel $\tilde{M}$ a un groupe d'homologie $H_3(\tilde{M}) \neq 0$.

Par dualité de Poincaré

$H_3(\widetilde{M}) = \mathbb{Z}$. D'après [Dold Réf.[19] p. 269 cor. 3.4] , $\widetilde{M}$ est compacte sans bord $\Longrightarrow$ M est compacte sans bord. La fibre au-dessus d'un point de M a un nombre fini d'éléments. Donc $\pi_1(M)$ est un groupe fini. Ce qui contredit l'hypothèse $cd\ \pi = 2$.

Envisageons le cas

2) $\pi_2(M) \neq 0$

L'idée dans ce cas-là est d'effectuer sur des modifications sur M de manière à se ramener au cas 1°). Plus précisément, on utilise un cas particulier d'une construction d'Epstein [Réf.18] .

Par le théorème de la sphère [Réf.18 th 2.1] , on sait que l'on peut représenter les générateurs de π_2 considéré comme π - module par des applications g_α telles que $g_\alpha(\mathbb{S}^2)$ soit une sphère à deux côtés ou un plan projectif dans $M - bd$.

Considérons alors tous les générateurs g_α tels que $g_\alpha(\mathbb{S}^2)$ soit une sphère dans M . Le fait que π soit indécomposable et un lemme de [[18] lemme 6.2] impliquent que $g_\alpha(\mathbb{S}^2)$ partage M . Coupons alors M le long de ces sphères. Par le théorème de Van-Kampen et parce que π est indécomposable, une et une seule de ces composantes, W_π , a un groupe fondamental non nul; Remplissons toutes les 2 - sphères de bord de W_π par des balles de dimension 3. On obtient une variété de dimension 3 : notée $\widetilde{M}$.

Propriétés *Dans nos hypothèses, on a:*

i) $\pi_1(\widetilde{M}) \simeq \pi$,

ii) $\pi_2(\widetilde{M}) = 0$.

Démonstration

Le cas *i)* se résoud en remarquant que $\pi_1\left[W_\pi\right] \simeq \pi$ et que le groupe fondamental d'un espace ne dépend que du 2 - squelette .

Cas *ii)*

Supposons, par l'absurde que $\pi_2(\widetilde{M}) \neq 0$. Alors toujours grâce au théorème [Réf. 18 th. 2.1] un générateur g_α de π_2 serait représenté par un plan projectif dans $\widetilde{M}$.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \cup S^2 & \longrightarrow & \overline{M}^* \\ \downarrow & & \downarrow p \\ P^2 & \longrightarrow & \overline{M} \end{array}$$

où $\overline{M}^*$ est la variété orientable au-dessus de $\overline{M}$.

Cela induit en homotopie le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_2\left(\overline{M}^*, \bigcup_{i\in I} S_i^2\right) & \longrightarrow & \overbrace{\oplus \pi_1(S^2)}^{=0} & \longrightarrow & \pi_1(\overline{M}^*) \\ p_* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_2(M, P^2) & \longrightarrow & \pi_1(P^2) & \longrightarrow & \pi_1(M) \\ & & = \mathbb{Z}_2 & & \end{array} .$$

L'application P_* est un isomorphisme puisque P est en particulier une fibration. D'où par exactitude $\mathbb{Z}_2$ est plongé dans $\pi \simeq \pi_1(M)$. Contradictoire puisque π ne peut avoir d'éléments d'ordre fini. C.Q.F.D.

Applications du théorème :

1) Tous les groupes de noeud π sont groupe fondamental d'une variété de dimension 3 et vérifient $cd\ \pi = 2$.
Donc $dim_G \pi = 2$.

2) Les groupes de la forme $\pi = \left\{ \mathbb{Z}, a_1, \ldots, a_r \,/\, \begin{array}{c} a_i \mathbb{Z} a_i^{-1} = \mathbb{Z}^{\varepsilon_i} \\ 1 \leq i \leq r \\ \text{et} \quad \varepsilon_i = \pm 1 \end{array} \right\}$

sont extension de $\mathbb{Z} = \langle Z \rangle$ par le groupe libre à r générateurs $F_r = \{a_1, \ldots, a_r\}$. La suite spectrale d'Hochschild-Serre implique que $cd\ \pi = 2$. Par ailleurs, Hempel et Jaco [Réf. 20] ont montré que π est le groupe fondamental d'une variété de dimension 3.
Donc $dim_G \pi = 2$.

REMARQUE

On peut retrouver ce résultat d'une autre façon [cf Cor.5.6] ou encore en montrant directement que l'application β de la proposition 2.6 est injective.

§7 GROUPES A UN RELATEUR, GROUPES ABELIENS.

Proposition 7.1

Les groupes π *à un relateur sans torsion vérifient* $dim_G = 2$.

Démonstration

Par le théorème d'identité de Lyndon [Réf.21] on a $R/[R,R] = \mathbb{Z}\pi$ comme π - module. L'application β de (2.6) est un monomorphisme. D'après le corollaire (2.7) $dim_{G\pi} = 2$

Proposition 7.2

Tout groupe abélien π *non nécessairement de présentation finie tel que* $cd\ \pi = 2$ *vérifie* $dim_{G\pi} = 2$.

Démonstration

Tout groupe abélien de $cd = 2$ est en particulier localement nilpotent. D'après le théorème de Gruenberg [Réf.24 p.149] le nombre de Hirsch, $h(\pi)$ est égal à

i) $h(\pi) = cd = 2$ si π est de type fini

ii) $h(\pi) = 1$ si π n'est pas de type fini .

Dans le cas *i)*, on voit facilement que $\pi = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ donc $dim_{G\pi} = 2$.

Dans le cas $ii)$, π est un groupe abélien sans torsion de rang 1, donc un sous-groupe de $\mathbb{Q}$. Tout revient à montrer que $dim_G \mathbb{Q} = 2$.

Or $\mathbb{Q}$ possède une présentation de la forme [cf Réf. 11 Ex. 14 p.32] :

$$\mathbb{Q} = \left\{ a_1, a_2, \ldots / a_1 = a_2^2,\ a_2 = a_3^3, \ldots, a_3^3, \ldots, a_n = a_{n+1}^{n+1}, \ldots \right\}$$

Considérons le modèle cellulaire X associé à celle-ci . On a $X = \varinjlim_{n \longrightarrow \infty} (X_n)$ où X_n est le modèle cellulaire associé à la présention $Pr(n)$.

$$Pr(n) = \left\{ a_1, \ldots a_n,\ a_{n+1} \Big/ \begin{matrix} a_1 = a_2^2; \\ \ldots \\ a_n = a_{n+1} \end{matrix} \right\} \simeq \mathbb{Z}$$

On a $def\ Pr(n) = def\ \mathbb{Z} = 1$. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui du théorème B, sachant qu'il existe un 2 - complexe K tel que $K \simeq K(\mathbb{Z}, 1)$ [par exemple le modèle cellulaire de $\mathbb{Z} = \{X, Y / X = Y^2\}$] ,on démontre que $\pi_2(X_n) = 0,\ \forall n$. Ce qui entraine que $\pi_k(X_n) = 0,\ \forall k>1$ et $\forall n$. D'où

$$\pi_k(X) = \pi_k(\varinjlim X_n) = \varinjlim \pi_k(X_n) = 0, \quad k>1 \qquad \text{d'où}$$

$$X \simeq K(\mathbb{Q}, 1) \quad \Longrightarrow \quad dim_G \mathbb{Q} = 2 \ .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 7 .3

Les groupes localement nilpotents de dimension cohomologique 2, sont de dimension géométrique 2.

DEMONSTRATION

C'est une simple application du théorème C *de* [*Réf. 27*] *qui nous dit que ces groupes sont nécessairement de sous-groupes de* $\mathbb{Q}$ *ou de* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Eilenberg S. and Ganea T. : On the Lusternik-Schnirelmann, category Ann. of abstract groups, 1957 No: 65 , p. 517-518.

2. Swan R.G. : Groups of cohomological dimension one, J. of Algebra 12,1969,p.585-610.

3. Bieri R. and Eckmann B. : Groups with Homological Duality Generalizing, Poincaré Duality Inventiones Math. No: 20, 1973, p. 103

4. Serre J.-P. : Cohomologie des groupes discrets, Prospects in Math. Ann. of Math. Studies No: 70, Princeton, 1971.

5. Stammbach U. : Homology in Group Theory, lecture Notes in Math., No: 359, Springer Verlag, 1973.

6. Greenberg M.J. : Lecture on algebraic topology, Benjamin 1970.

7. Maunder C.F.R. : Algebraic topology, Van Nostrand, 1970.

8. Hilton P.J, Stammbach U. : A Course in Homological Algebra, Springer Verlag, 1970.

9. Whitehead J.H.C. : Combinatorial Homotopy I, Bull. Amer. Soc. 55, p. 213-245,1949.

10. Montgomery M. Susan: Left and Right Inverses in Group Algebras, Bull. Amer. Soc. 75, p. 539-540,1969.

11. Magnus-Karrass-Solitar : Combinatorial Group Theory, Pure and Appl.Math. Vol. XIII, Interscience 1966.

12. Rotmann J.H. : The Theory of Groups, Allyn-Bacon, 197

13.Evans-Moser : Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds, Trans. of Amer. Math. Soc. Vol. 168, p. 189-210,1972.

14.Jaco W. : Finitely presented subgroups of their manifold groups, Inventiones Math. No: 13, p. 335-346, 1971.

15.Dold A. : Lectures on algebraic topology Springer Verlag, 1972.

16.Moise E.E. : Affine Structures on 3-manifolds V Ann. of. Math. 56, 1952, p. 96-114.

17.Glaeser L. : Geometrical Topology, vol.I Van Nostrand, 1970

18.Epstein D.B.A. : Projective Planes in 3-manifolds Proc. of London Math. Soc. II, 1961 p. 469-484.

19.Whitehead J.H.C. : On the asphericity of regions in the 3-sphère, Fund. Math. 32, 1939, p. 149-166.

20.Hempel J. and Jaco W. : 3-Manifolds Wich fiber over a surface, Amer, Journal Math. 1972, vo. 94, p.189-205.

21.Lyndon R. : Cohomology of groups, with a single defining relation, Ann. Journal Math. 1950, p. 650-665.

22.Karrass, Pietrowski, Solitar A improved sub_group theorem... Can. J. Math. 26, 1974, p. 214-224.

23.Bieri R. : Normal subgroups in duality groups and groups of cohomological dimension 2. Journal of Pure and Applied Algebra, (7) 1976, p. 35-51.

24.Gruenberg K. : Cohomological topics in group Theory, Lecture Note in Math. No: 143 Springer Verlag, 1970.

25.Poenaru V. : Groupes discrets, Lecture Notes in Math. No: 401 Springer-Verlag, 1974.

26.Tzee-Nan Kuolo : On groups of finite cohomological dimension, J. of Algebra, 1973, vol. 24 p. 460-464.